



FONKSİYONEL DERECELİ KİRİŞLERİN SONLU ELEMANLAR METODUYLA STATİK ANALİZİ

Muhittin Turan ve Volkan Kahya

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 61080
Trabzon

ABSTRACT

Static analysis of functionally graded beams is presented by the finite element method. The beam element here has ten degrees-of-freedom, and considers shear deformations. Beam material obeys the Hooke's law, and material properties change according to the power-law rule through-the-thickness. Equations of equilibrium are obtained by the Lagrange's equation, and solved numerically. Beam deflections and stresses along the beam thickness are presented by graphs and tables. Comparisons show that the results from the present element agrees well with available ones in literature.

ÖZET

Bu çalışmada, fonksiyonel dereceli elastik kirişlerin statik analizi sonlu elemanlar metoduyla yapılmıştır. Kullanılan sonlu eleman, on serbestlik dereceli olup kayma deformasyonlarını dikkate almaktadır. Kiriş malzemesinin Hooke kanununa uygun olduğu, malzeme özelliklerinin ise yükseklik boyunca kuvvet kuralına göre değiştiği kabul edilmektedir. Denge denklemleri, Lagrange eşitliği yardımıyla elde edilmiş ve sayısal olarak çözülmüştür. Kirişte yer değiştirmeler ve yükseklik boyunca gerilmelerin değişimine ait sayısal sonuçlar grafik ve tablolarla verilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde mevcut olanlarla karşılaştırılmış ve kullanılan sonlu elemanın başarılı olduğu görülmüştür.

GİRİŞ

Fonksiyonel dereceli malzemeler (FDM), iki veya daha fazla bileşen içeren kompozitlerdir. Genellikle, seramik ve metallerin belirli oranlarda karışımıyla imal edilmektedirler. Bu malzemeler, bünyelerinde bulunan seramikten dolayı yüksek sıcaklığa ve metalden dolayı da yüksek gerilmelere dayanıklıdır. Bu özelliklerinden dolayı havacılık, denizcilik, makine ve inşaat mühendisliği alanlarında farklı uygulamalarda tercih edilmektedirler. Fonksiyonel dereceli malzemelere olan talebin her geçen gün artması, bunların mekanik davranışlarını daha iyi anlamayı gerektirmektedir. Literatürü incelediğimizde birçok çalışma karşımıza çıkmaktadır.

Sankar [1], yayılı yük altındaki fonksiyonel dereceli bir kirişin elastisite çözümünü yapmıştır. Fakat bu çalışmada kirişin kayma deformasyonunu göz önünde bulundurmamıştır. Bu açığı gören bilim adamları fonksiyonel dereceli kirişlerin statik ve dinamik analizlerinde atalet ve kayma deformasyonunu göz önünde bulunduran yeni analitik yaklaşımlar önermişlerdir [2-8].

Kapurıa vd., tabakalı fonksiyonel dereceli kirişlerin üçüncü derece zikzak teorisine dayalı yöntemle statik ve serbest titreşimini sayısal olarak incelemiş ve ayrıca deneysel olarak doğrulamışlardır [9]. Fonksiyonel dereceli kirişlerin farklı teorilere göre statik ve serbest titreşim analizi sonlu elemanlar yöntemiyle yapılmıştır [10-13]. Vo vd. [14], fonksiyonel dereceli sandviç kirişlerin statik davranışını hem analitik hem de sonlu elemanlar yöntemiyle incelemişlerdir.

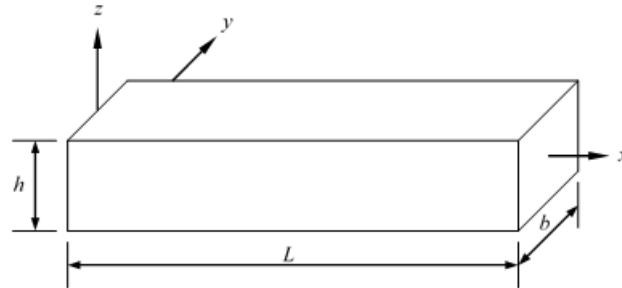
Bu çalışmada, fonksiyonel dereceli elastik kirişlerin statik analizi sonlu elemanlar metoduyla yapılmıştır. Kullanılan sonlu eleman, on serbestlik dereceli olup kayma deformasyonlarını dikkate almaktadır. Kiriş malzemesinin Hooke kanununa uyduğu, malzeme özelliklerinin ise yükseklik boyunca kuvvet fonksiyonu şeklinde değiştiği kabul edilmektedir. Denge denklemleri, Lagrange eşitliği yardımıyla elde edilmiş ve sayısal olarak çözülmüştür. Kirişte yer değiştirmeler ve yükseklik boyunca gerilmelerin değişimine ait sayısal sonuçlar grafik ve tablolarla verilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde mevcut olanlarla karşılaştırılmış ve kullanılan sonlu elemanın başarılı olduğu görülmüştür.

TEORİK FORMÜLASYON

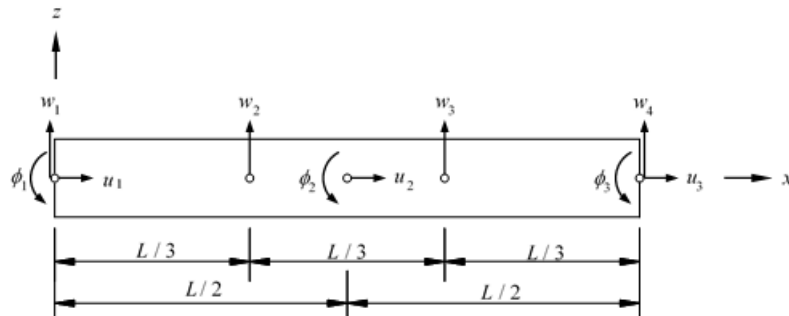
Boyutları ve koordinat eksenleri Şekil 1’de görülen fonksiyonel dereceli elastik kirişin çeşitli sınır şartları için üniform yük altında statik analizi sonlu elemanlar metoduyla yapılmıştır. Kullanılan sonlu eleman, on serbestlik dereceli olup Şekil 2’de görülmektedir. Kirişte malzeme özellikleri yükseklik boyunca

$$P(z) = (P_s - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m \quad (1)$$

şeklinde kuvvet fonksiyonu olarak değişmektedir. Burada P_s ve P_m sırasıyla seramik ve metal bileşenlerine ait malzeme özelliklerini (Elastisite modülü E , Poisson oranı ν ve yoğunluk ρ) göstermektedir. k negatif olmayan bir sayıdır.



Şekil 1. Fonksiyonel dereceli kirişin koordinat takımı ve geometrisi



Şekil 2. 10 serbestlik dereceli sonlu eleman

Şekil 2’de görülen sonlu eleman için yer değiştirme vektörü

$$\mathbf{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3\}^T \quad (2)$$

şeklindedir. Burada u , w ve ϕ sırasıyla boyuna ve enine yer değiştirmeler ile dönme bileşenleri olup çubuk ekseninde ölçülmektedirler. Birinci merteye kayma deformasyonu kiriş teorisine göre herhangi bir noktadaki yer değiştirmeler

$$U(x, z) = u(x) - z \phi(x), \quad W(x, z) = w(x) \quad (3)$$

şeklindedir. Sayısal çözüm için yer değiştirmeler

$$u(x) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x) u_i, \quad w(x) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(x) w_i, \quad \phi(x) = \sum_{i=1}^3 \theta_i(x) \phi_i \quad (4)$$

şeklinde kabul edilmiştir. Burada, $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ ve $\theta_i(x)$ şekil fonksiyonlarını, u_i , w_i ve ϕ_i ise genelleştirilmiş yer değiştirmeleri göstermektedir. $\varphi_i(x)$ ve $\theta_i(x)$ şekil fonksiyonları için ikinci dereceden, $\psi_i(x)$ için ise üçüncü dereceden polinomlar olarak seçilmiştir.

Denge denklemleri

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (5)$$

Lagrange eşitliği yardımıyla elde edilmiştir. Burada, $L = T - (U + V)$ Langragian fonksiyonu ve q_i düğüm noktalarındaki genelleştirilmiş koordinatlardır. İfadedeki T ve U sırasıyla kinetik ve şekil değiştirme enerjilerini, V ise dış yükün yaptığı işi göstermektedir. (3), (4) ve (5) ifadeleri yardımıyla hareket denklemi

$$\mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (6)$$

şeklinde elde edilir. Burada, \mathbf{k} rijitlik matrisi, \mathbf{f} ise dış yük vektörüdür. Bu eşitliğin çözümünden yer değiştirmeler elde edilir.

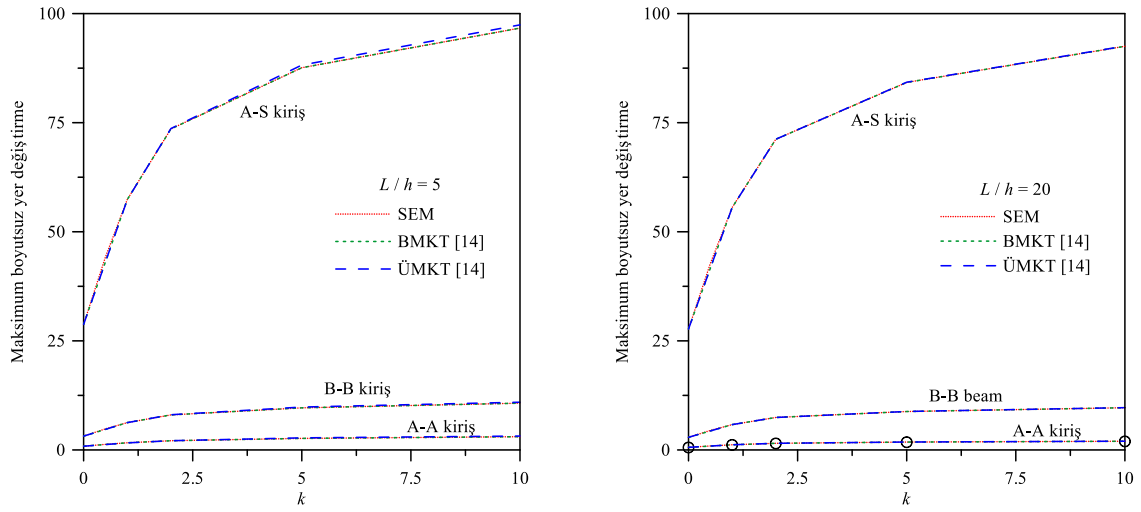
SONUÇLAR

Sayısal sonuçlar için metal (alüminyum, Al) ve seramikten (alüminyum oksit, Al_2O_3) oluşan bir FDM kiriş düşünülmüştür. Kiriş malzemesi için sırasıyla metal ve seramiğe ait Elastisite modülü, yoğunluk ve Poisson oranı $E_m = 70\text{GPa}$, $\rho_m = 2702\text{kg/m}^3$, $\nu_m = 0.3$, $E_s = 380\text{GPa}$, $\rho_s = 3960\text{kg/m}^3$, $\nu_s = 0.3$ şeklinde alınmıştır. Kiriş için sınır şartları ankastre-ankastre (A-A), ankastre-serbest uç (A-S) ve basit mesnetli kiriş (B-B) şeklinde kabul edilmiştir. Kesmede düzeltme faktörü $K=5/6$ olarak alınmıştır. Yer değiştirmeler ve gerilmeler

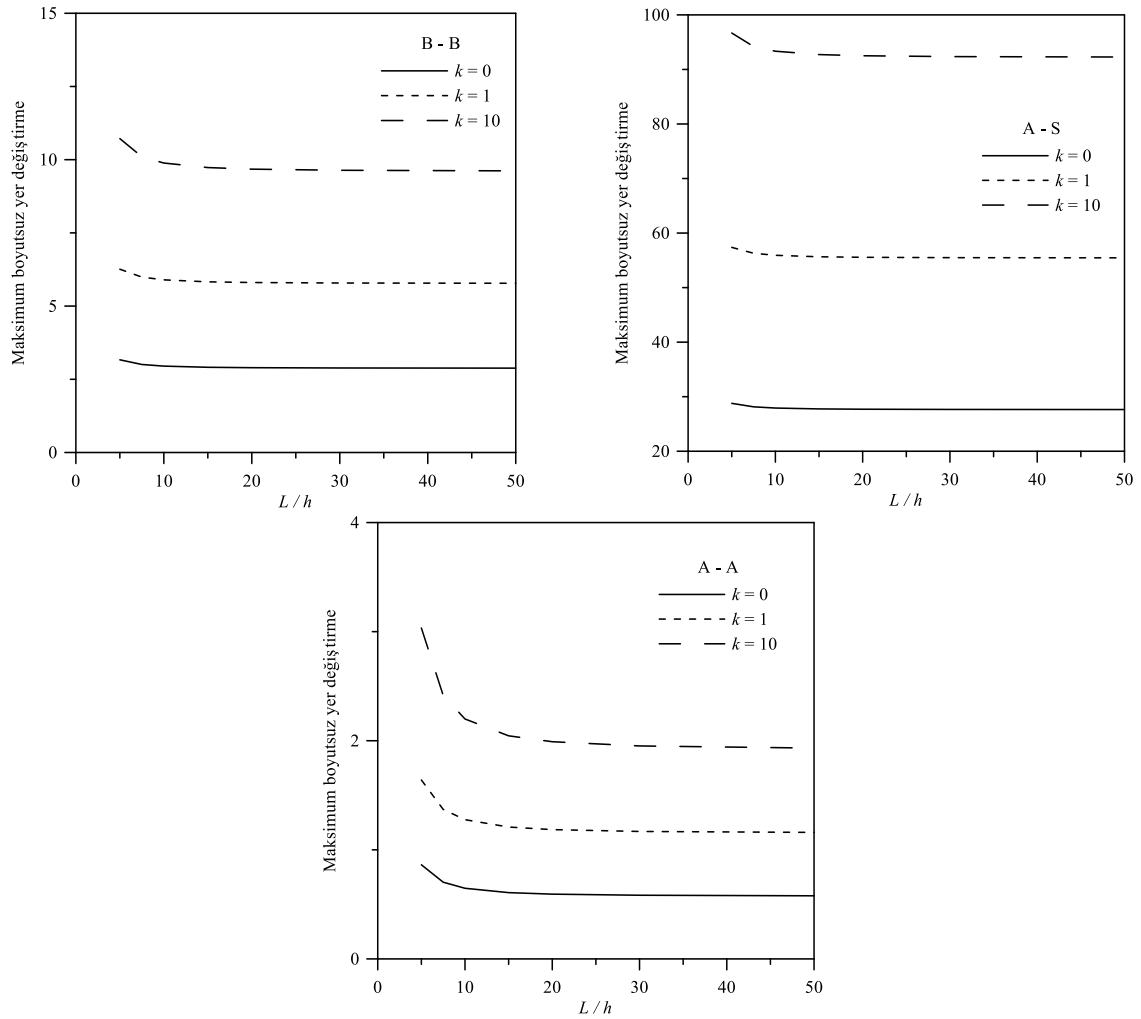
$$\bar{w} = \frac{100E_m h^3}{qL^4} W(x, z), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{qL} \sigma_x(x, z), \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{qL} \sigma_{xz}(x, z) \quad (7)$$

şeklinde boyutsuz olarak sunulmuştur. Sayısal sonuçlar için kirişin on elemana bölünmesi yeterli olmaktadır. Şekil 3’te, farklı sınır şartlarındaki FDM kirişlerin maksimum boyutsuz yer değiştirmeleri, k ’nın değişimine göre önerilen yöntemle hesaplanmış ve Vo vd. [14] tarafından verilen birinci derece ve üçüncü derece kiriş teorisine dayalı analitik yöntemin sonuçlarıyla kıyaslanmıştır. Grafik incelendiğinde sonuçların uyumlu olduğu görülmüştür. Şekil 4’te farklı sınır şartlarındaki FDM kirişlerin L/h oranının değişimine göre maksimum yer değiştirmeleri verilmiştir. Burada, L/h oranının artmasıyla yer değiştirmelerin sabit bir değere doğru gittiği görülmektedir. Ayrıca, beklendiği üzere en büyük yer değiştirmeler konsol kirişte (A-S) elde edilmektedir. Şekil 5’te kiriş uzunluğu boyunca yer değiştirmeler iki farklı L/h oranına göre ve farklı sınır şartlarına göre incelenmiştir. Şekilde görüldüğü gibi, tüm sınır şartlarında k arttıkça,

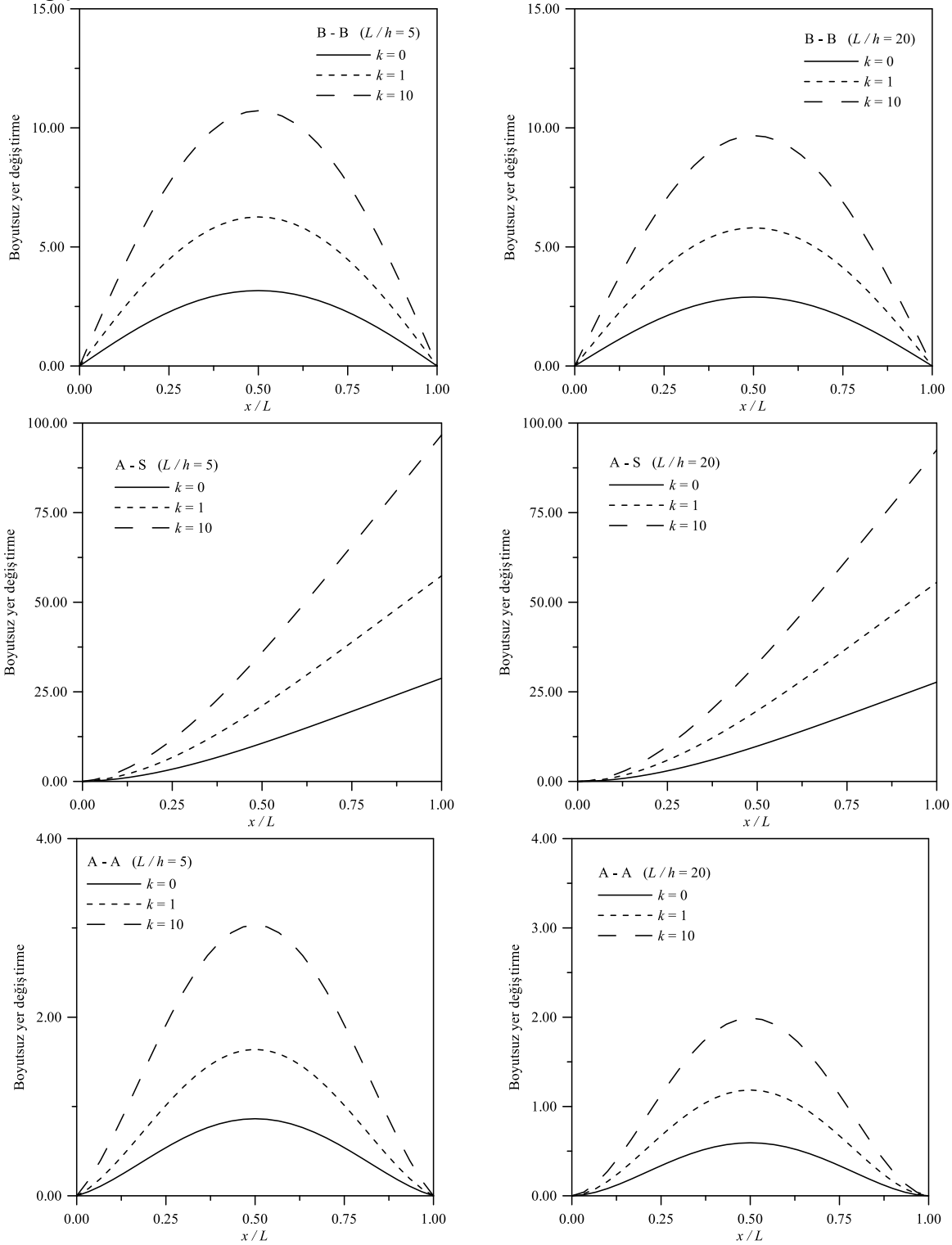
yani kiriş metale yaklaştıkça, yer değiştirmeler artmaktadır. Bununla beraber, L/h oranı arttıkça yer değiştirmeler azalmaktadır.



Şekil 3. Farklı sınır şartlarına sahip FDM kirişlerin k 'nın değişimine göre maksimum yer değiştirmeleri



Şekil 4. Farklı sınır şartlarına sahip FDM kirişlerin L/h oranının değişimine göre maksimum yer değiştirmeleri



Şekil 5. Farklı sınır şartlarına sahip FDM kirişlerin uzunluğu boyunca (x/L) yer değiştirmeleri

Çizelge 1'de, FDM basit kirişin normal ve kayma gerilmeleri k 'nın değişimine göre incelenmiştir. Burada, sonuçlar birinci derece ve üçüncü derece kiriş teorisine dayalı analitik çözümlerle kıyaslanmıştır. Normal gerilmelerin tüm teoriler için aynı sonucu verdiği görülmüştür. Fakat kayma gerilmelerinde birinci mertebe teorisinden elde edilen sonuçlar,

üçüncü mertebe kiriş teorisinden elde edilenlerden daha küçüktür. Ayrıca, birinci mertebe kiriş teorisine göre, L/h oranı arttıkça normal gerilmenin arttığı, kayma gerilmesinin ise sabit kaldığı görülmüştür. Çizelge 2'de ise diğer sınır şartlarına (A-A, A-S) göre normal ve kayma gerilmelerin değerleri verilmiştir. Benzer yorumlar bu sınır şartları için de geçerlidir.

Şekil 6'da yayılı yük altında FDM basit kirişin kalınlığı boyunca normal gerilme dağılımı verilmiştir. Şekiller incelendiğinde $k=0$, yani kirişin seramik iken, normal gerilme grafiği beklendiği üzere simetrik çıkmaktadır. k 'nın değeri arttıkça, kirişin üst yüzeyinde basınç gerilmesinin arttığı görülmektedir. Şekil 7'de yayılı yük altında FDM basit kirişin yüksekliği boyunca kayma gerilmesi dağılımı verilmiştir. Birinci mertebe kiriş teorisinde kirişin alt ve üst yüzeyinde eşit olmak üzere kayma gerilmesi tek değer almaktadır. En büyük kayma gerilmesi $k=0$ durumunda (kiriş tamamen seramik iken) oluşmaktadır.

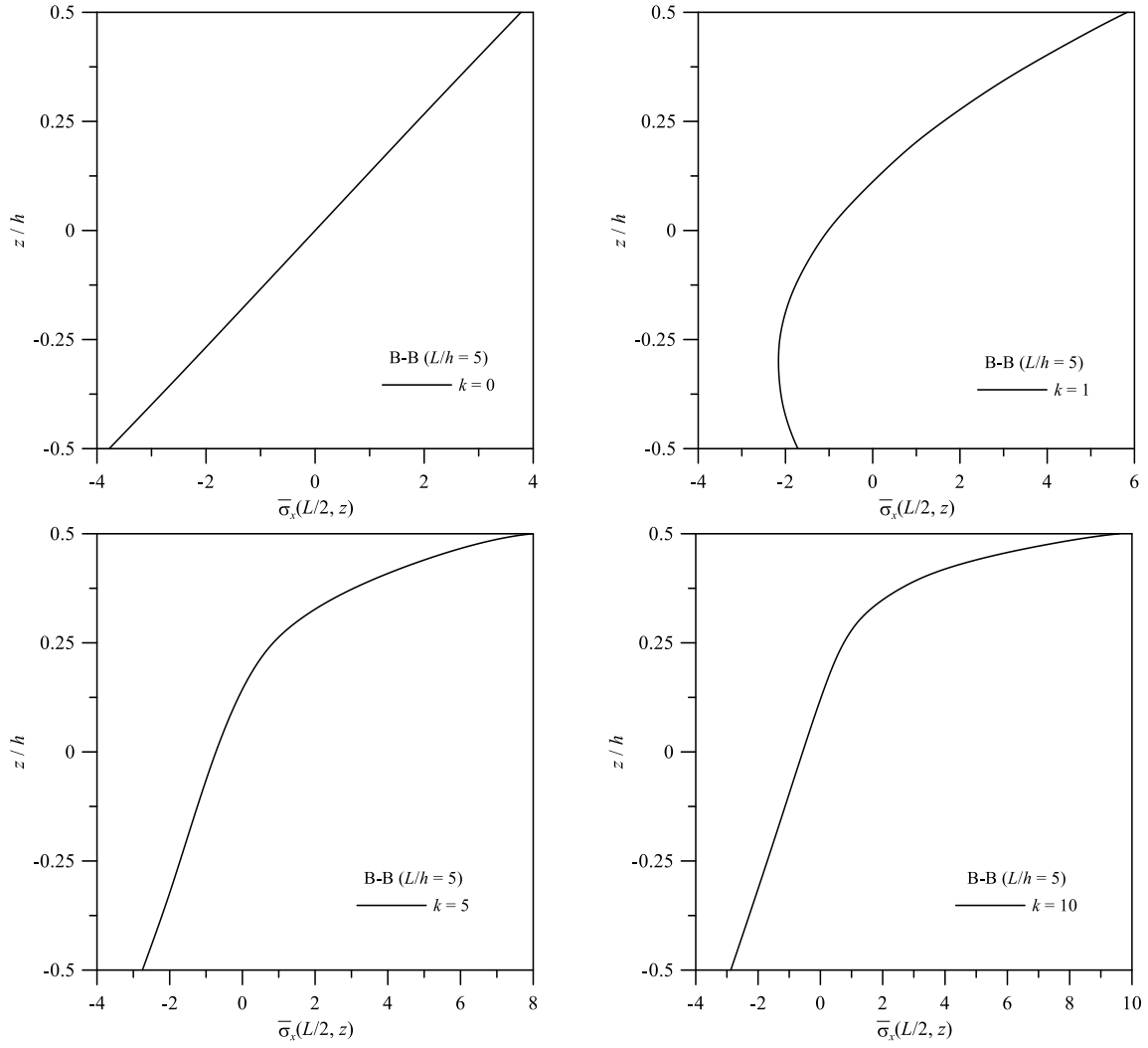
Çalışma sonucunda özetle, kullanılan birinci mertebe kiriş teorisine dayalı, beş düğüm noktalı ve on serbestlik dereceli sonlu elemanın literatürle oldukça uyumlu sonuçlar verdiği görülmüştür.

Çizelge 1. Fonksiyonel derecelendirilmiş basit mesnetli kirişlerin normal ve kayma gerilmeleri

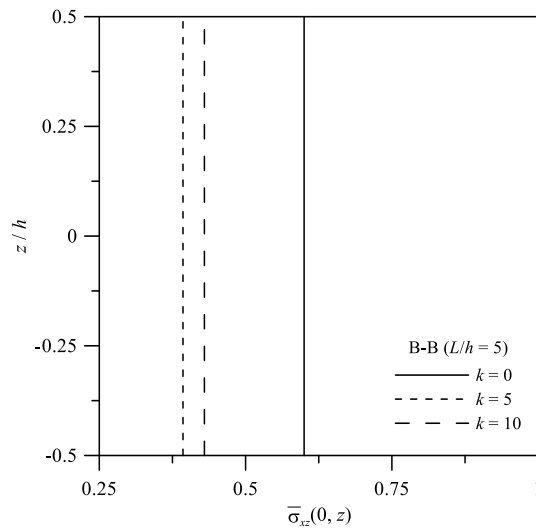
| | Teori | $k = 0$ | $k = 0.5$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 5$ | $k = 10$ | $k = 100$ |
|----------------------------|-----------|---------|-----------|---------|---------|---------|----------|-----------|
| $L/h = 5$ | | | | | | | | |
| $\bar{\sigma}_x(L/2, h/2)$ | SEM | 3.7750 | 4.9534 | 5.8345 | 6.8127 | 7.9957 | 9.5863 | 17.5253 |
| | BMKT [14] | 3.7500 | - | 5.7959 | 6.7676 | 7.9428 | 9.5228 | - |
| | ÜMKT [14] | 3.8020 | - | 5.8836 | 6.8826 | 8.1106 | 9.7122 | - |
| $\bar{\sigma}_{xz}(0,0)$ | SEM | 0.6000 | 0.6272 | 0.6000 | 0.5106 | 0.3930 | 0.4296 | 0.5748 |
| | BMKT [14] | 0.5976 | - | 0.5976 | 0.5085 | 0.3914 | 0.4279 | - |
| | ÜMKT [14] | 0.7332 | - | 0.7332 | 0.6706 | 0.5905 | 0.6467 | - |
| $L/h = 20$ | | | | | | | | |
| $\bar{\sigma}_x(L/2, h/2)$ | SEM | 15.0099 | 19.8137 | 23.3379 | 27.2508 | 31.9828 | 38.3451 | 70.1010 |
| | BMKT [14] | 15.0000 | - | 23.1834 | 27.0704 | 31.7711 | 38.0913 | - |
| | ÜMKT [14] | 15.0129 | - | 23.2053 | 27.0991 | 31.813 | 38.1385 | - |
| $\bar{\sigma}_{xz}(0,0)$ | SEM | 0.6000 | 0.6272 | 0.6000 | 0.5106 | 0.3930 | 0.4296 | 0.5748 |
| | BMKT [14] | 0.5976 | - | 0.5976 | 0.5085 | 0.3914 | 0.4279 | - |
| | ÜMKT [14] | 0.7451 | - | 0.7451 | 0.6824 | 0.6023 | 0.6596 | - |

Çizelge 2. Fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin farklı sınır şartlarına göre normal ve kayma gerilmeleri

| | Teori | $k = 0$ | $k = 0.5$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 5$ | $k = 10$ | $k = 100$ |
|--|-------|---------|-----------|---------|---------|---------|----------|-----------|
| $L/h = 5, \bar{\sigma}_x(0, -h/2)$ | | | | | | | | |
| A-A | SEM | 2.4750 | 0.8084 | 1.1247 | 1.5216 | 1.8066 | 1.8858 | 2.2984 |
| A-S | SEM | 14.9750 | 4.8912 | 6.8052 | 9.2065 | 10.9307 | 11.4100 | 13.9066 |
| $L/h = 5, \bar{\sigma}_{xz}(L/20, 0)$ | | | | | | | | |
| A-A | SEM | 0.6000 | 0.6272 | 0.6000 | 0.5106 | 0.3930 | 0.4296 | 0.5748 |
| A-S | SEM | 1.2000 | 1.2544 | 1.2000 | 1.0212 | 0.7860 | 0.8593 | 1.1496 |
| $L/h = 20, \bar{\sigma}_x(0, -h/2)$ | | | | | | | | |
| A-A | SEM | 9.8999 | 3.2335 | 4.4989 | 6.0864 | 7.2262 | 7.5431 | 9.0936 |
| A-S | SEM | 59.9000 | 19.5647 | 27.2209 | 36.8262 | 43.7227 | 45.6399 | 55.6264 |
| $L/h = 20, \bar{\sigma}_{xz}(L/20, 0)$ | | | | | | | | |
| A-A | SEM | 0.6000 | 0.6272 | 0.6000 | 0.5106 | 0.3930 | 0.4296 | 0.5748 |
| A-S | SEM | 1.2000 | 1.2544 | 1.2000 | 1.0212 | 0.7860 | 0.8593 | 1.1496 |



Şekil 6. Yayıllı yük altında basit mesnetli fonksiyonel dereceli kirişlerin kalınlığı boyunca normal gerilme dağılımı



Şekil 7. Yayıllı yük altında basit mesnetli fonksiyonel dereceli kirişlerin kalınlığı boyunca kayma gerilmesi dağılımı

KAYNAKLAR

- [1] B.V. Sankar, An elasticity solution for functionally graded beams, *Composites Science and Technology*. 61 (2001) 689-696. doi:10.1016/S0266-3538(01)00007-0.
- [2] X.-F. Li, A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams, *Journal of Sound and Vibration*. 318 (2008) 1210-1229. doi:10.1016/j.jsv.2008.04.056.
- [3] X.-F. Li, B.-L. Wang, J.-C. Han, A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams, *Archive of Applied Mechanics*. 80 (2010) 1197-1212. doi:10.1007/s00419-010-0435-6.
- [4] H.-T. Thai, T.P. Vo, Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, *International Journal of Mechanical Sciences*. 62 (2012) 57-66. doi:10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014.
- [5] T.-K. Nguyen, T. P. Vo, H.-T. Thai, Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, *Composites: Part B*. 55 (2013) 147–157. doi:10.1016/j.compositesb.2013.06.011.
- [6] T.-K. Nguyen, B.-D. Nguyen, A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams, *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 17 (2015) 613-631. doi:10.1177/1099636215589237.
- [7] J.L. Mantari, J. Yarasca, A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams, *Composite Structures*. 134 (2015) 593–601. doi:10.1016/j.compstruct.2015.08.073.
- [8] L. Hadji, Z. Khelifa, A.B.E. Abbes, A new higher order shear deformation model for functionally graded beams, *KSCE Journal of Civil Engineering*. 20 (2016) 1835-1841. doi:10.1007/s12205-015-0252-0.
- [9] S. Kapuria, M. Bhattacharyya, A.N. Kumar, Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: A theoretical model and its experimental validation, *Composite Structures*. 82 (2008) 390–402. doi:10.1016/j.compstruct.2007.01.019.
- [10] M. Filippi, E. Carrera, A.M. Zenkour, Static analyses of FGM beams by various theories and finite elements, *Composites: Part B*. 72 (2015) 1–9. doi:10.1016/j.compositesb.2014.12.004.
- [11] J. Yarasca, J.L. Mantari, R.A. Arciniega, Hermite-Lagrangian finite element formulation to study functionally graded sandwich beams, *Composite Structures*. 140 (2016) 567–581. doi:10.1016/j.compstruct.2016.01.015.
- [12] V. Kahya, M. Turan, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, *Composites Part B*. 109 (2017) 108-115. doi:10.1016/j.compositesb.2016.10.039.
- [13] M. Şimşek, M. Al-Shujairi, Static, free and forced vibration of functionally graded sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads, *Composites Part B*. 108 (2017) 18-34. doi:10.1016/j.compositesb.2016.09.098.
- [14] T.P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, F. Inam, J. Lee, Static behavior of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory, *Composites: Part B*. 68 (2015) 59–74. doi:10.1016/j.compositesb.2014.08.030.